Théories de jauge

D'après Adel Bilal

Le principe d'invariance de jauge est très général
et gouverne toutes les interactions connues:
électromagnétisme,
interaction faible,
interaction forte,
la gravitation même peut être comprise ainsi

Quelques éléments de calcul

Dans l'espace à 3 dimensions
soit *f* une fonction et *v* un vecteur

notons $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

$\nabla f \; : \; \partial_i f$ — Gradient *grad(f)*

$\nabla \cdot v \; : \; \partial_i v_i$ — Divergence *div(v)*

$\nabla \wedge v \; : \; \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$ — Rotationnel *rot(v)*

$\Delta f \; : \; \nabla \cdot \nabla f \; : \; \partial_i \partial_i f$ — laplacien

> Nota bene:
> Tout au long de cette présentation
> la sommation sur les indices doublés est implicite

Tenseur totalement antisymétrique

Petit rappel

élément ijk...

0 si deux indices sont égaux,

1 si obtenu à partir de 123.. par un nombre pair de transpositions

-1 si obtenu à partir de 123.. par un nombre impair de transpositions

à deux dimensions $\epsilon_{i\ j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

à trois dimensions tenseur fait des trois matrices

$$\epsilon_{i\ j\ 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_{i\ j\ 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_{i\ j\ 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dualité

associe à un scalaire s le tenseur ε_{ijk} s

associe à un vecteur v_k le tenseur $\varepsilon_{ijk}\ v_k$

associe à un tenseur t_{jk} le tenseur $\varepsilon_{ijk}\ t_{jk}$

Quelques notations et règles de calcul

Petit rappel

δ_{ij} est le symbole de Kronecker, 1 si i=j, 0 autrement

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl}=\delta_{il}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

Considérons trois vecteurs $\vec{u}, \ \vec{v} \ \ et \ \ \vec{w}$

produit tensoriel $t_{ij}=v_i w_j$

produit scalaire $s=\vec{v}\cdot\vec{w} \quad s=\delta_{ij}t_{ij}=\delta_{ij}v_i w_j=v_i w_i$

produit vectoriel $\vec{u}=\vec{v}\wedge\vec{w} \ \ o\,u \ \ \vec{v}\times\vec{w} \quad u_i=\epsilon_{ijk}t_{jk}=\epsilon_{ijk}v_j w_k$

produit mixte $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) \quad \epsilon_{ijk}u_i v_j w_k$

double produit vectoriel $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=\vec{v}(\vec{u}\cdot\vec{w})-\vec{w}(\vec{u}\cdot\vec{v})$

$$\epsilon_{ijk}u_j\epsilon_{klm}v_l w_m=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})u_j v_l w_m=u_j v_i w_j-u_j v_j w_i$$

Cobord d'une forme: différentielle extérieure de la forme

$$\omega \;\rightarrow\; \epsilon_{ijk}\partial_k\omega$$

Exemples:

- une 0-forme associée à une fonction *f*
  son cobord est associé au gradient de la fonction
- une 1-forme ω_k associée au vecteur *V*, son cobord est associé au rotationnel du vecteur $\epsilon_{ijk}\partial_j\omega_k$
- une 2-forme ω_{jk} associée au vecteur *V*, son cobord est associé à la divergence du vecteur $\epsilon_{ijk}\partial_i\omega_{jk}$

Le cobord d'un cobord est nul, $\epsilon_{ilm}\partial_j\epsilon_{ijk}\partial_k$
ainsi le rotationnel d'un gradient ou la divergence d'un rotationnel

Soit une variété V orientée de dimension n avec bord
soit ω une forme différentielle de degré n-1 sur V
l'intégrale de ω sur le bord de V est égale
à l'intégrale sur V du cobord dω.

$$\int_{\breve{V}} d\vec{\omega} = \int_{b\breve{V}} \vec{\omega}$$

Stokes

Dimension n=1

Considérons un chemin C allant de M1 à M2 et une fonction f

$$\int_{\breve{C}} d\vec{f} = f(M2) - f(M1)$$

Dimension n=2

Considérons une aire S bordée par la courbe C
et une 1-forme (A, B)

Riemann

$$\int_{\breve{C}} A\,dx + B\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Dimension n=3

La variation d'une fonction d'un point à un autre est égale au travail de son gradient le long d'un arc joignant le premier au deuxième point

Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface S bordant un volume V est égal à l'intégrale dans V de la divergence du champ

$$\int_{\breve{S}} V_i \epsilon_{ijk} dx_j dx_k = \int_{\breve{V}} \epsilon_{ijk} \partial_i \epsilon_{jkl} V_l dx_i dx_j dx_k$$

$$\epsilon_{ijk} \partial_i \epsilon_{jkl} V_l = \delta_{il} \partial_i V_l = \partial_i V_i$$

Le travail (ou circulation) d'un champ de vecteurs le long du bord C d'une surface orientée S est égal au flux du rotationnel du champ à travers S

$$\int_{\breve{C}} V_i ds_i = \int_{\breve{S}} \epsilon_{ijk} \partial_j V_k dx_i dx_j$$

+ bien d'autres, formules de Green

$\nabla\cdot(\nabla\wedge v)=0$ En effet $\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j v_k=0$

$\nabla\wedge\nabla f=\mathbf{0}$ En effet $\epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j f=0$

L'inverse est vrai si l'espace est simplement connexe:

$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=O \Rightarrow \exists \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}=\nabla\wedge\boldsymbol{A}$

$\nabla\wedge\boldsymbol{v}=O \Rightarrow \exists f \quad \boldsymbol{v}=\nabla f$

notons $\partial_\mu=\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$

Dans l'espace de Minkowski

$\partial_\mu f \qquad \partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu \qquad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} \qquad \Box f=\partial^\mu\partial_\mu f \qquad \partial_\mu v^\mu$

$\partial_\mu v_\nu-\partial_\nu v_\mu=O \Rightarrow \exists f$ tel que $v_\mu=\partial_\mu f$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma}=O \Rightarrow \exists A^\rho$ tel que $F^{\rho\sigma}=\partial^\rho A^\sigma-\partial^\sigma A^\rho$

Electromagnétisme dans le cadre classique

Equations de Maxwell dans le vide

en l'absence de charge magnétique

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \nabla\wedge\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad \nabla\wedge\boldsymbol{B}-\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{\epsilon_0}\boldsymbol{j}$$

Attention c=1

Test de cohérence $\nabla\cdot(\nabla\wedge\boldsymbol{v})=0$

$$0=\nabla\cdot(\nabla\wedge\boldsymbol{E})=-\nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot B$$

OK

$$\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\rho=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot E=\nabla\cdot\frac{\partial E}{\partial t}=\nabla\cdot(\nabla\wedge B-\frac{1}{\epsilon_0}j)=-\frac{1}{\epsilon_0}\nabla\cdot j$$

$\Rightarrow$ conservation de la charge $\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot j=0$

Introduisons les potentiels

(Eq 2) $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = O \Rightarrow$ $\boxed{\exists \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \wedge \boldsymbol{A}}$

(Eq 3) $$\nabla \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \wedge E = -\nabla \wedge \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \wedge \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\exists \phi \qquad E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \phi}$$

Ces deux équations nous ont permis de définir les potentiels scalaire et vecteur

Les deux autres s'écrivent en fonction de A et φ

en notant que:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \Delta A$$

(Eq 1) $$-\Delta \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

(Eq 4) $$-\Delta A + \nabla (\nabla \cdot A) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} A = \frac{1}{\epsilon_0} j$$

Mais A et φ sont définis
à un gradient et à une dérivée par rapport au temps près

$$A \rightarrow A' = A + \nabla\lambda \qquad\qquad B \rightarrow B + \nabla\wedge(\nabla\lambda) = B$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\lambda \quad \Rightarrow \quad E \rightarrow E + \nabla\frac{\partial}{\partial t}\lambda - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\lambda = E$$

C'est *l'invariance de jauge*

Choisissons A' et φ' tels que $\nabla\cdot A' + \frac{\partial}{\partial t}\phi' \;=\; 0$

Il faut donc trouver λ tel que $\nabla\cdot A + \Delta\lambda + \frac{\partial}{\partial t}\phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\lambda \;=\; 0$

C'est une équation d'onde en λ : $\Delta\lambda - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\lambda \;=\; -\nabla\cdot A - \frac{\partial}{\partial t}\phi$

Elle a toujours une solution

Choix de jauge (Lorentz): $$\nabla \cdot A + \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$

Le jeu d'équations s'écrit

(Eq 1) $$-\Delta \phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

(Eq 4) $$-\Delta A + \frac{\partial^2}{\partial t^2} A = \frac{1}{\epsilon_0} j$$

Equations d'ondes se propageant à la vitesse c=1.

Inversement « déduire » les équations de Maxwell de ce que l'électromagnétisme est décrit par **A** et φ de façon invariante sous les transformations de jauge:

$$\boxed{\begin{aligned} A &\to A+\nabla\lambda \\ \phi &\to \phi-\dot{\lambda} \end{aligned}}$$

- Les observables sont des quantités invariantes de jauge

$\nabla\wedge\nabla\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad B=\nabla\wedge A$ est une première observable

$$\nabla\phi \to \nabla\phi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\lambda$$

$$\dot{A} \to \dot{A}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\lambda$$

$\Rightarrow \quad \nabla\phi+\dot{A}\equiv -E$ est invariant: 2^{eme} observable

On en déduit deux des équationsde Maxwell

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad \nabla\wedge\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

- Que vaut ∇·E ?

c'est une quantité a priori non nulle!

Définissons:

$$\begin{aligned}\rho &= \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{j} &= \epsilon_0 \nabla \wedge \boldsymbol{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

- On montre alors comme précédemment que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot j = 0$$

ρ et j peuvent s'interpréter comme une charge et son courant conservé

$\hbar = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$

Electromagnétisme dans le cadre relativiste

$$g_\mu{}^\nu = g^\mu{}_\nu = \delta_{\mu\nu} \qquad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Champ électromagnétique: $F_{\mu\nu}$ $\quad F_{0i} = E_i \quad , \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad F_\mu{}^\nu = \delta_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad 1/2\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = E^2 + B^2$$

$F^{\mu\nu} \to \mathscr{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ $\quad$ symétrie $\quad \vec{B} \to \vec{E} \quad , \quad \vec{E} \to -\vec{B}$

où $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur d'ordre 4 totalement antisymétrique

dualité électrique - magnétique

Transformation de Lorentz d'un champ électromagnétique

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Appliquons une transformation de Lorentz le long de Oz: $F'^{\rho\sigma} = B^{\rho}_{\mu} F^{\mu\nu} B^{\sigma}_{\nu}$

$$B^{\rho}_{\sigma} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$E'_x = \gamma(E_x - \beta B_y) \qquad B'_x = \gamma(B_x + \beta E_y)$$

$$E'_y = \gamma(E_y + \beta B_x) \qquad B'_y = \gamma(B_y - \beta E_x)$$

$$E'_z = E_z \qquad B'_z = B_z$$

Electromagnétisme dans le cadre relativiste

Courant: $j_\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$

Equations de Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \mathbf{0}$$

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 = \partial_\nu j^\nu$$ courant conservé

Potentiel

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \exists A_\mu \;, \; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\partial_\mu \boldsymbol{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \boldsymbol{A}^\nu - \partial_\mu \partial^\nu \boldsymbol{A}^\mu = \Box \boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu \boldsymbol{A}^\mu) = \boldsymbol{j}^\nu$$

Invariance de jauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \lambda$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \rightarrow \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu A_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \lambda = F_{\mu\nu}$$

Jauge de Lorentz: $\partial^\mu A_\mu = 0$

$$\Box A^\nu = j^\nu$$

en l'absence de source: $\Box A^\nu = 0$

similaire à une équation de Klein-Gordon
pour une particule de masse nulle.

Mécanique quantique

Equation de Schrödinger $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$

pour une particule libre $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\nabla$

dans un potentiel électrique : $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\nabla + e\phi$

Réécrivons l'équation de Schrödinger comme:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)\psi = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^2\psi$$

Quelle est l'équation en présence d'un champ magnétique?

on peut deviner que, de même que $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi$

nous aurons $-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - eA$

Déduisons cela de l'invariance de jauge:

en mécanique quantique une observable est invariante sous un changement de phase *constant* de la fonction d'onde:

$$\psi \rightarrow e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi \qquad (\alpha \in \Re)$$

Une valeur moyenne est invariante sous cette transformation

$$<O> = \int d^3x \ \ \psi^* O \psi \ \rightarrow \ \int d^3x \ \ \psi^* e^{-i\alpha} O e^{i\alpha} \psi = \int d^3x \ \ \psi^* O \psi$$

l'équation de Schrödinger aussi :

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^2 \right] e^{i\frac{\alpha}{\hbar}}\psi \ = \ e^{i\frac{\alpha}{\hbar}}\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^2 \right]\psi \ = \ 0$$

Cette invariance $\psi \rightarrow e^{\frac{i\alpha}{\hbar}} \psi$ est une invariance *U(1) globale*

- globale car α ne dépend ni de *x* ni de *t*
- U(1) car les nombres complexes de module 1 forment le groupe U(1), intervalle [0,2π] avec 0 et 2π identifiés (le cercle) avec l'addition modulo 2π.

Le principe de jauge consiste à postuler que cette transformation

$\psi \rightarrow e^{\frac{i\alpha}{\hbar}} \psi$ reste une invariance lorsque $\alpha \equiv \alpha(t,\mathbf{x})$

on parle d'invariance U(1) locale ou
d'une invariance de jauge U(1)

Pour que l'équation de Schrödinger soit encore invariante il faut la modifier:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi\right) = e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi + i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\psi\right] = e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\alpha}\right)\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^2\left(e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi\right) = e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \nabla\alpha\right)^2\psi$$

et
$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^2\right]e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi = e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\alpha}\right) - \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \nabla\alpha\right)^2\right]\psi$$

Posons α = e λ

La transformation $\psi \;\rightarrow\; e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi$ a fait appaître les modifications:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \;\rightarrow\; i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\dot{\lambda}$$

$$\frac{\hbar}{i}\nabla \;\rightarrow\; \frac{\hbar}{i}\nabla+e\nabla\lambda$$

qui ressemblent aux transformations de jauge

$$e\phi \;\rightarrow\; e\phi-e\dot{\lambda}$$

$$e\boldsymbol{A} \;\rightarrow\; e\boldsymbol{A}+e\nabla\lambda$$

Ecrivant l'équation de Schrödinger en présence de champ électromagnétique

$$\boxed{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi\right)\psi \;=\; \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-e\boldsymbol{A}\right)^2\psi}$$

$$\psi \;\rightarrow\; e^{\frac{i\alpha}{\hbar}}\psi \quad\Rightarrow\quad e^{ie\frac{\lambda}{\hbar}}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\phi-e\dot{\lambda}\right)\psi \;=\; e^{ie\frac{\lambda}{\hbar}}\,\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-e\boldsymbol{A}+e\nabla\lambda\right)^2\psi$$

et la forme originelle est restaurée par
la transformation de jauge sur A, φ:

$$\phi \;\rightarrow\; \phi-\dot{\lambda}$$

$$\boldsymbol{A} \;\rightarrow\; \boldsymbol{A}+\nabla\lambda$$

Conclusion sur Schrödinger

L'équation de Schrödinger
avec champ électromagnétique
est invariante sous :

$$\psi \rightarrow e^{ie\frac{\lambda}{\hbar}}\psi$$
$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\lambda}$$
$$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A} + \nabla\lambda$$

si elle contient A et φ précisément sous la forme:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)\psi = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e\boldsymbol{A}\right)^2\psi$$

cette équation décrit le couplage
au champ électromagnétique conformément à l'expérience

Remarques:

- cette équation ne contient ni E ni B directement
- $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}e\phi$ et $\nabla + \frac{i}{\hbar}eA$ sont appelées dérivées covariantes
- pour coupler la particule ψ au champ A, φ il suffit de remplacer les dérivées par les dérivées covariantes
- partant de l'équation de Schrödinger, imposer l'invariance de jauge permet de généraliser l'équation en présence de champ électromagnétique ceci parce que le U(1) local du ψ est le même que celui du A, φ

Equation de Klein-Gordon

Equation d'une particule sans spin

contrainte: $P_\mu P^\mu = m^2$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \qquad \boxed{(\Box + m^2) \phi = 0}$$

en présence de champ: $P_\mu \rightarrow P_\mu + e A_\mu$

$$\left[(P_\mu + e A_\mu)(P^\mu + e A^\mu) - m^2 \right] \phi = 0$$

est invariante sous

$$\varphi \rightarrow e^{ie\lambda} \varphi$$
$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \lambda$$

Equation de Dirac

Equation de Dirac pour une particule (P^μ, m) dans un champ électromagnétique A^μ

$$A^\mu=(\phi,\boldsymbol{A}),\ A_\mu=(\phi,-\boldsymbol{A})$$

$$\boxed{\left[\gamma^\mu(P_\mu-e\,A_\mu)-m\right]\Psi=0}$$

$$P_\mu=i\,\partial_\mu$$

$$\left[\gamma^\mu(i\,\partial_\mu-e\,A_\mu)-m\right]\Psi=0$$

$$\gamma_\mu\,?$$

Equation libre

en l'absence de champ

On recherche

une équation covariante (Lorentz)

linéaire (en les dérivées premières),

compatible avec $E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$

Soit: $\left[\gamma^{\mu} P_{\mu} - m\right] \Psi = 0$

où Ψ est un "spineur" à N dimensions

γ^{μ} des matrices NxN

$\left[i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m\right] \Psi = 0$

Remarques:

H hermitique $\Rightarrow \gamma^{\mu}$ hermitiques

γ^{μ} scalaires viole l'invariance par rotation!

$P = \Psi^* \Psi$ est la composante temps d'un 4-vecteur

Compatibilité: $(\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = m^2 = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_3^2 - \partial_3^2$

soit: $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\ g^{\mu\nu} \boldsymbol{I}_N$ quatre matrices anticommutantes

Valeurs propres: $\gamma^0 \pm 1$ les autres $\pm$ i

$$\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad tr(\gamma^i) = -tr(\gamma^0 \gamma^i \gamma^0) = -tr(\gamma^i \gamma^0 \gamma^0) = -tr(\gamma^i) = 0$$

anticommutation tr(AB)=tr(BA)

donc N est pair

N=0
N=2 il n'y a que 3 matrices 2x2 anticommutantes
les matrices de Pauli
N=4 !

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad P_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} E\,\boldsymbol{I} & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -E\,\boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

Courant conservé

$$\boxed{\Psi^{+}\gamma^{\mu}\Psi}$$

$$\boxed{\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right]\Psi=0}$$

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi-m\Psi=0$$

HC

$$i\partial_{\mu}\Psi^{+}\gamma^{\mu}+m\Psi^{+}=0$$

$$i\Psi^{+}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi-m\Psi^{+}\Psi=0$$

$$i\partial_{\mu}\Psi^{+}\gamma^{\mu}\Psi+m\Psi^{+}\Psi=0$$

en sommant

$$\partial_{\mu}\left(\Psi^{+}\gamma^{\mu}\Psi\right)=0$$

Est-ce un quadrivecteur?

En présence de champ électromagnétique

appliquons la recette $\partial^\mu \;\rightarrow\; \partial^\mu - i\,e\,A^\mu$

$$\left[i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - m \right] \Psi = 0$$

est invariante sous $\Psi \;\rightarrow\; e^{ie\,\lambda}\,\Psi$

$$A_\mu \;\rightarrow\; A_\mu - \partial_\mu \lambda$$

Introduction du champ électromagnétique
invariance de jauge

appliquons la recette: $\boldsymbol{P}_\mu \rightarrow \boldsymbol{P}_\mu + \boldsymbol{e}\,\boldsymbol{A}_\mu$

ou $\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu - \frac{i}{\hbar} e\,A^\mu$ dérivées covariantes

ou $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} e\,\phi \qquad \nabla \rightarrow \nabla - \frac{i}{\hbar} e\,\boldsymbol{A}$

$$\left[\gamma^0 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\,\phi\right) + \gamma\cdot\left(i\hbar\nabla + e\,\boldsymbol{A}\right) - m\right]\Psi = 0$$

est invariant sous

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi &\rightarrow e^{i e \frac{\lambda}{\hbar}}\,\Psi \\ \boldsymbol{A} &\rightarrow \boldsymbol{A} + \nabla\lambda \\ \phi &\rightarrow \phi - \dot{\lambda} \end{aligned}}$$

Equation covariante?

Représentation du groupe de Lorentz
dans l'espace des spineurs à quatre composantes

Le groupe de Lorentz

$\equiv$ SL(2,$\mathbb{C}$)

à tout quadrivecteur x^μ on associe une matrice 2x2 par

$x^\mu \rightarrow \sigma_\mu x^\mu$ où les σ_μ sont les matrices de Pauli

SL(m) désigne un groupe spécial linéaire,
groupe de matrices m x m inversibles de déterminant 1

Une rotation est définie par 3 paramètres,
les angles d'Euler
Un « boost » est défini par 3 paramètres,
les coordonnées de la vitesse
Une transformation générale a 6 paramètres

Ecrivant $\mathscr{L} = e^{L}$ L est une matrice de trace nulle de la forme

$$L=\alpha_1 S_1+\alpha_2 S_2+\alpha_3 S_3+\beta_1 K_1+\beta_2 K_2+\beta_3 K_3$$

où les S_i sont les générateurs des rotations,

et les K_i ceux des boosts

$$S_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algèbre de Lie

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k \qquad [S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k \qquad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k$$

$S_i + i K_i$ et $S_i - i K_i$ commutent

$$[S_i + i K_i, S_j - i K_j] = 0$$

$$[S_i \pm i K_i, S_j \pm i K_j] = 2\, \epsilon_{ijk} (S_k \pm i K_k)$$

L'algèbre du groupe de Lorentz est identique à $SU^2 \times SU^2$

Rappels

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\qquad \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=\boldsymbol{I}\qquad \sigma_x\sigma_y=-\sigma_y\sigma_x=i\sigma_z$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\sigma)(\boldsymbol{b}\cdot\sigma)=(a_x\sigma_x+a_y\sigma_y+a_z\sigma_z)(b_x\sigma_x+b_y\sigma_y+b_z\sigma_z)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{i}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\cdot\sigma$$

$$(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\wedge(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\phi=ie\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\phi+ie\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi=ie(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\phi$$

$$(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\cdot(i\vec{\nabla}+e\vec{A})\phi=-\vec{\nabla}^2\phi+e^2\vec{A}^2\phi+ie\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\phi)+ie\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

$$=(-\Delta+e^2\vec{A}^2+2ie\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\phi$$

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\wedge\vec{x}\qquad \vec{L}=\vec{x}\wedge(-i\vec{\nabla})$$

$$2ie\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi=ie(\vec{B}\wedge\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\phi=-e\vec{B}\cdot\vec{L}$$

Limite ultra-relativiste de l'équation de Dirac

chiralité $\gamma_5 = i\,\gamma_0\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$

$$\gamma_5 = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 \\ \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit un spineur $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ $\quad \gamma_5 \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \phi+\chi \\ \phi+\chi \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \phi-\chi \\ -\phi+\chi \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de γ_5

pour les valeurs propres 1 et -1

On les obtient avec les projecteurs

$1+\gamma_5$ et $1-\gamma_5$

ce sont des états propres de chiralité

Soit $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ une solution de l'équation de Dirac

$$(E-m)\,\phi - \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,\chi = 0$$

$$\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,\phi - (E+m)\,\chi = 0$$

$$P_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} E\,\boldsymbol{I} & -\vec{p}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{p}\cdot\vec{\sigma} & -E\,\boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

Hélicité $\lambda = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}$

$$\lambda\chi = \frac{E-m}{|\vec{p}|}\phi$$

$$\lambda\phi = \frac{E+m}{|\vec{p}|}\chi$$

$$\lambda(\phi+\chi) = \frac{E}{p}(\phi+\chi) - \frac{m}{p}(\phi-\chi)$$

$$\lambda(\phi-\chi) = -\frac{E}{p}(\phi-\chi) + \frac{m}{p}(\phi+\chi)$$

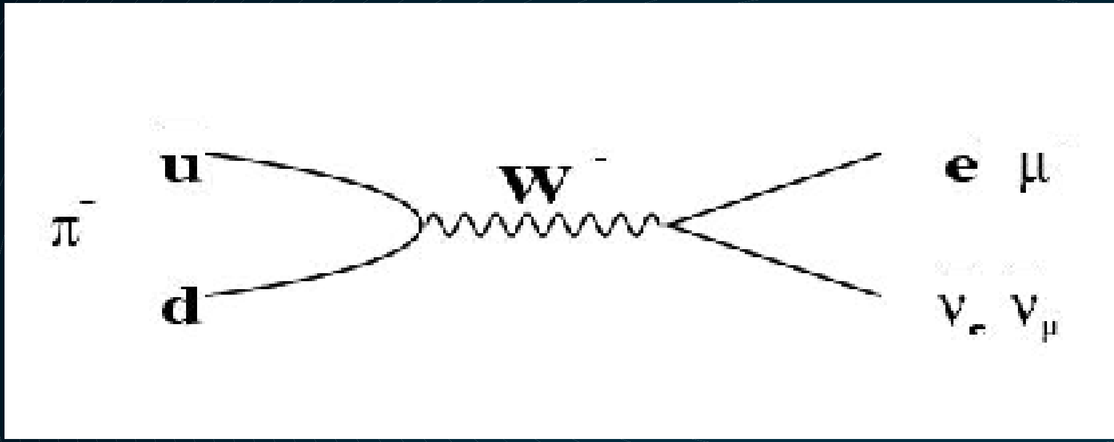
$$\lambda(\phi+\chi) = \frac{1}{\beta}(\phi+\chi) - \frac{1}{\beta\gamma}(\phi-\chi)$$

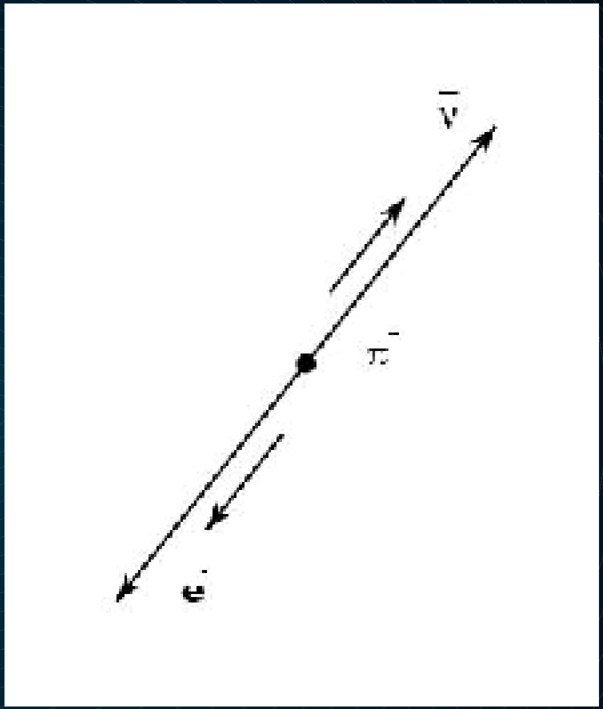
$$\lambda(\phi-\chi) = -\frac{1}{\beta}(\phi-\chi) + \frac{1}{\beta\gamma}(\phi+\chi)$$

à haute énergie, $\gamma >> 1$ et $\beta = 1$,

les états propres de chiralité le sont d'hélicité

Application: suppression de $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}$ et de $K^- \rightarrow e^- \bar{\nu}$





$m_\pi = 135$ MeV

$m_\mu = 106$ MeV

$m_e = 0{,}5$ MeV

$m_\pi > m_\mu >> m_e$

or $BR_e = 10^{-4}$

$BR_\mu = 99{,}99\%$

conservation de l'hélicité + antineutrino droit

$\Rightarrow$ électron droit

or le W ne se couple qu'aux électrons gauches

V-A

Limite non-relativiste, spin 1/2 , facteur gyromagnétique

Soit $\begin{pmatrix}\phi \\ \chi\end{pmatrix}$ une solution de l'équation de Dirac et notons $\vec{\pi} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A}$

$$\begin{bmatrix} i\partial/\partial t - eV - m & -\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{\pi}\cdot\vec{\sigma} & -i\partial/\partial t + eV - m \end{bmatrix} \begin{pmatrix}\phi \\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Psi = e^{-imt}\Psi' \qquad \begin{bmatrix} i\partial/\partial t - eV & -\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{\pi}\cdot\vec{\sigma} & -i\partial/\partial t + eV - 2m \end{bmatrix} \begin{pmatrix}\phi' \\ \chi'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$

Lorsque la masse est très grande comparée aux énergies en jeu:

$$\chi' = \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2}m\phi' \quad \text{et} \quad i\frac{\partial\phi'}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma})(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma})}{2}m + eV\right]\phi'$$

Notant que $(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma})(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma})=\vec{\pi}^2 - e\vec{B}$

$$i\frac{\partial\phi'}{\partial t}=\left[\frac{1}{2}m(-i\vec{\nabla}-e\vec{A})^2-\frac{e}{2}m\vec{B}\cdot\vec{\sigma}+eV\right]\phi'$$

En champ constant: $\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}\wedge\vec{x} \quad \vec{L}=\vec{x}\wedge(-i\vec{\nabla}) \quad \vec{S}=\frac{1}{2}\vec{\sigma}$

$$i\frac{\partial\phi'}{\partial t}=\left[-\frac{\Delta}{2}m-\frac{e}{2}M\vec{B}\cdot(\vec{L}+2\vec{S})+eV+e^2\vec{A}^2\right]\phi'$$

Le facteur gyromagnétique anormal de l'électron est 2

Invariance de jauge non abélienne

abélien = commutatif

Symétrie non-abélienne,   exemple de l'isospin

Le proton et le neutron peuvent être vus comme deux états équivalents sous les interactions fortes:
en première approximation ils ont la même masse
et donc la même équation de Dirac (spin 1/2)

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right]\Psi_n = 0$$
$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right]\Psi_p = 0$$

ou, définissant l'isospineur $\Psi = \begin{bmatrix}\Psi_n \\ \Psi_p\end{bmatrix}$

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right]\Psi = 0$$

Introduisons une superposition complexe $\begin{bmatrix}\tilde{\Psi}_n \\ \tilde{\Psi}_p\end{bmatrix} = U \begin{bmatrix}\Psi_n \\ \Psi_p\end{bmatrix}$

U est une matrice 2 x 2 complexe unitaire de U(2)

L'invariance sous les transformations *U ∈ U(2)*
généralise l'invariance *U(1)* globale
considérée pour l'électromagnétisme

$$0 = \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right] \tilde{\Psi} = \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right] U\Psi = U \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right] \Psi$$

multipliant par $U^{-1} = U^{+}$ ceci est équivalent à $\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right] \Psi = 0$

On pourrait alors essayer de rendre local ce U(2)
c'est à dire supposer que $U \equiv U(X,t)$
et introduire des champs qui généralisent les A .

Mais ceci donne une équation qui ne correspond pas
à l'observation expérimentale, du moins pour l'isospin.

Les interactions fortes, la couleur

Il existe, en interactions fortes, un nombre quantique dit « couleur »

Chaque quark, de spin ½ est décrit par une équation de Dirac
chaque type de quark existe en 3 variantes de couleur:

On peut donc définir un vecteur de couleur:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix}$$

qui obéit à l'équation de Dirac: $\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right] \Psi = 0$

Il existe une symétrie globale *U(3)* $\quad \Psi \rightarrow U\Psi$

en fait on ne prend que SU(3)

Une matrice U du groupe $SU(3)$ est de la forme

$$\boxed{U = e^{iH}} \text{ avec } H^+ = H \text{ et } tr\, H = 0$$

$$U^+ = e^{-iH} = U^{-1}$$

$$det\, U = exp(tr\, log\, U) = exp\,(tr\, iH) = exp(0) = 1$$

Le nombre de matrices 3 x 3 hermitiennes indépendantes est 9
la condition $tr\, H = 0$ en enlève une.
Toute matrice H avec $H^+ = H$ et $tr\, H = 0$ peut se développer sur une base de 8 matrices H_i.

Exemple de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Un élément général de SU(3) est alors: $$U = \exp\left[i \sum_{j=1}^{8} \alpha_j H_j \right]$$

et pour le SU(3) local: $$U(\boldsymbol{x}, t) = \exp\left[i \sum_{j=1}^{8} \alpha_j(\boldsymbol{x}, t) H_j \right]$$

Attention:

$$\partial_\mu U \neq \left[i \sum_{j=1}^{8} \partial_\mu \alpha_j H_j \right] U$$ car les H_j ne commutent pas

Mais il existe toujours 8 β_j tels que $$\partial_\mu U = \left[i \sum_{j=1}^{8} \partial_\mu \beta_j H_j \right] U$$

Avec un SU(3) local:

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)U(\boldsymbol{x},t)\Psi = iU\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + i\gamma^\mu(\partial_\mu U)\Psi - U m\Psi = U\left[i\gamma^\mu(\partial_\mu + U^{-1}\partial_\mu U) - m\right]\Psi$$

Nous voyons apparaître le terme supplémentaire

$$U^{-1}\partial_\mu U = \left[i\sum_{j=1}^{8}\partial_\mu\beta_j H_j\right]$$

Comme pour l'équation de Schrödinger
et le U(1) de l'électromagnétisme
nous introduisons une généralisation des A_μ
(des champs de jauge de SU(3))
pour absorber le terme supplémentaire

Soient donc A_μ un ensemble de 4 matrices de SU(3)

On postule que par une transformation SU(3) locale (de jauge) les A_μ se transforment comme:

$$A_\mu \to U\left(A_\mu + \frac{i}{g} U^{-1}\,\partial_\mu U\right)U^{-1} \quad \text{soit} \quad A_\mu \to U\,A_\mu U^{-1} + \frac{1}{g}\left(i\,\partial_\mu U\right)U^{-1}$$

Si on fait cette transformation sur A_μ et $\Psi \to U\,\Psi$

$$\left[\gamma^\mu (i\,\partial_\mu - g\;A_\mu) + m\right]\Psi = 0 \quad \text{reste invariant}$$

$$\left\{\gamma^\mu\left[i\,\partial_\mu - g\;U\,A_\mu U^{-1} - i(\partial_\mu U)\,U^{-1}\right] + m\right\}U\,\Psi = 0$$

$$\left\{\gamma^\mu\left[i\,U\,\partial_\mu + i\,\partial_\mu U - g\;U\,A_\mu - i\,\partial_\mu U\right] + m\,U\right\}\Psi = 0$$

$$U\left\{\gamma^\mu\left[i\,\partial_\mu - g\;A_\mu\right] + m\right\}\Psi = 0$$

Le nombre « g » est l'analogue du « e » de l'électromagnétisme c'est la « constante de couplage »

$A_\mu \in SU(3)$ on peut le développer: $A_\mu = \sum_{j=1}^{8} A_\mu^j H_j$

Il y a donc 8 champs vecteurs

En électromagnétisme il n'y a qu'un A_μ, le photon (boson de jauge)
ici il y a 8 A^j_μ donc 8 bosons de jauge dits «gluons«

Autre différence: interactions fortes $\frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137}$ $\frac{g^2}{\hbar c} = \alpha_s \simeq 1$

La propagation du photon est décrite par les équations de Maxwell à partir des invariants de jauge E et B ou $F_{\mu\nu}$

Ici l'équivalent de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial\nu A_\mu$ est $G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$

qui introduit le commutateur des matrices de SU(3)

$G_{\mu\nu}$ se transforme de façon covariante $\quad G_{\mu\nu} \to U\, G_{\mu\nu}\, U^{-1}$

La quantité $tr\, G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ est alors invariante de jauge et fournit les densités d'énergie et d'impulsion des champs de gluons.

Preuve: $$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu + i\, g\, A_\mu A_\nu - (\mu \Leftrightarrow \nu)$$

sous la transformation $A_\mu \to U A_\mu U^{-1} + \frac{1}{g}\left(i\, \partial_\mu U\right) U^{-1}$

$$G_{\mu\nu} \to \partial_\mu\left(U A_\nu U^{-1} + \frac{i}{g}\partial_\nu U\, U^{-1}\right) + i\, g\left(U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}\partial_\mu U\, U^{-}\right)\left(U A_\nu U^{-1} + \frac{i}{g}\partial_\nu U\, U^{-1}\right) - (\mu \Leftrightarrow \nu)$$

$$= \partial_\mu U A_\nu U^{-1} + U \partial_\mu A_\nu U^{-1} + U A_\nu \partial_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}\partial_\mu \partial_\nu U\, U^{-1} + \frac{i}{g}\partial_\nu U\, \partial_\mu U^{-1}$$

$$+ i\, g\, U A_\mu A_\nu U^{-1} - U A_\mu U^{-1}\, \partial_\nu U\, U^{-1} - \partial_\mu U A_\nu U^{-1} - \frac{i}{g}\partial_\mu U\, U^{-1}\, \partial_\nu U\, U^{-1} - (\mu \Leftrightarrow \nu)$$

Notant que $\partial_\mu U^{-1} = U^{-1}\, \partial_\mu U\, U^{-1}$

les termes 1 et 8 s'annulent, les termes 3 et 7 s'annulent avec leur contre-parties dans la permutation, les termes 4,5 et 9 s'annulent avec leurs contreparties

$$G_{\mu\nu} \to U\left(\partial_\mu A_\nu + i\, g\, A_\mu A_\nu - (\mu \Leftrightarrow \nu)\right) U^{-1}$$

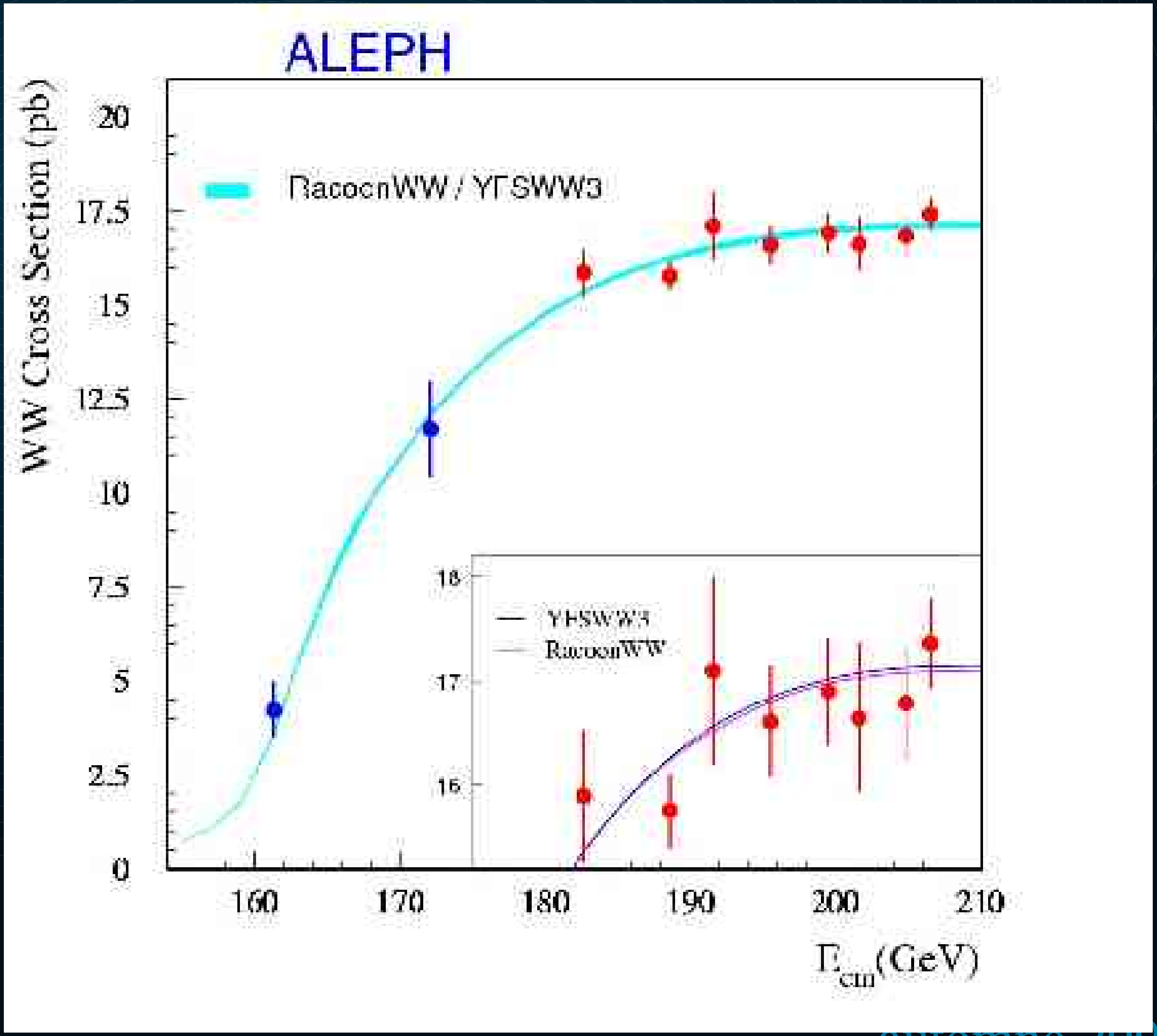
CQFD

Une conséquence importante du terme en $A_\mu A_\nu$ dans $G_{\mu\nu}$
est l'apparition de $\partial_\mu A_\nu A_\mu A_\nu$ et $A_\mu A_\nu A_\mu A_\nu$ dans tr $G_{\mu\nu} G_{\mu\nu}$
Ces termes sont absents en électromagnétisme
Ils décrivent les interactions entre 3 ou 4 bosons de jauge.
L'existence de tels termes, preuve du caractère non abélien
de la théorie a été vérifiée expérimentalement.

Evidence for the triple-gluon vertex from measurements of the QCD colour factors in Z decay into four jets. ALEPH Coll. Physics Letters B 284 (1992)151

Une autre théorie de jauge décrit les interactions électrofaibles.
Fondée sur SU(2) x U(1) elle est non abélienne et a donc des interactions à 3 ou 4 bosons, W^+, W^-, Z, .

L'interaction WWZ est prédite, le test expérimental a été fourni par la mesure de la dépendance en énergie de la section efficace de production de paires de W à LEP II.



La théorie ne prédit pas la valeur de g mais établit des relations entre les couplages des différentes particules.
En interactions fortes (SU(3)), la théorie est appelée chromodynamique quantique (QCD), il n'y a qu'une constante

En théorie électrofaible il y a deux constantes (SU(2)xU(1)) qu'on peut exprimer en terme de α et de $\sin^2\theta_w$ (angle de Weinberg)

Remarques:
-masse, dans une théorie de jauge non brisée les bosons sont de masse nulle
en QCD les gluons sont de masse nulle
en électrofaible, les W et Z sont massifs, mécanisme de Higgs
brisure spontanée de l'invariance de jauge, la constante de Fermi est petite
les interactions faibles sont faibles (à basse énergie)

$$\frac{e^2}{M_W^2}$$

– constantes de couplage variables

en théorie quantique des champs la constante de couplage varie avec l'échelle d'énergie. Unification.

$$\alpha(m_\pi)=\frac{1}{137} \quad \alpha(m_Z)=\frac{1}{129} \quad \alpha_s(m_\pi)\sim 1 \quad \alpha_s(m_Z)\sim 0{,}12$$

dans QCD les interactions nucléaires sont fortes à basse énergie
confinement, pas de développements en perturbations possible, réseaux
Pour E >> 1 GeV le couplage devient petit, modèle des partons
liberté asymptotique, méthode des perturbations applicable.