Champ électromagnétique

- Transformation des champs,
  cas d'un champ électrique statique
  perpendiculaire au boost
  Equivalence à un photon.
- Courant
- Equations de Maxwell, potentiels
- Principe du laser à électrons libres
- Champ magnétique créé par un courant
- Mouvement d'une particule
- dans un champ magnétique uniforme
- Perte d'énergie

Transformation de Lorentz d'un champ électromagnétique

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Appliquons une transformation de Lorentz le long de Oz:

$$B^{\rho}_{\sigma}=\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$F'^{\rho\sigma}=B^{\rho}_{\mu}F^{\mu\nu}B^{\sigma}_{\nu}$$

$$E'_x=\gamma(E_x-\beta B_y) \qquad B'_x=\gamma(B_x+\beta E_y)$$
$$E'_y=\gamma(E_y+\beta B_x) \qquad B'_y=\gamma(B_y-\beta E_x)$$
$$E'_z=E_z \qquad B'_z=B_z$$

Cas d'un champ électrique pur le long de Oy

$$\vec{B}\,' = -\gamma\vec{\beta}\wedge\vec{E}$$

$$E'_x = 0 \qquad B'_x = \gamma\beta E_y$$

$$E'_y = \gamma E_y \qquad B'_y = 0$$

$$E'_z = 0 \qquad B'_z = 0$$

Limite ultrarelativiste: $\beta = 1$

$\vec{B}\,'$ et $\vec{E}\,'$ sont perpendiculaires, égaux, et perpendiculaires à leur direction de propagation.
Ils sont équivalents à une onde électromagnétique.

Courant

$$\begin{pmatrix}\Delta t'\\ \Delta x'\\ \Delta y'\\ \Delta z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta t\\ \Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}$$

$$\Delta t'\Delta x'\Delta y'\Delta z' = \gamma^2(1-\beta^2)\Delta t\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

ΔT ΔV est un invariant de Lorentz

La charge ΔQ est un invariant $\dfrac{\Delta Q}{\Delta T\,\Delta V}(\Delta t, \Delta\vec{x})$ est un 4-vecteur

$$(\rho, \vec{j}) = j^\mu$$

Conservation de la charge: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ $\quad\partial_\mu j^\mu = 0$

avec $\partial^\mu = \left(\dfrac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$

Equations de Maxwell en l'absence de charge magnétique

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=(\vec{\nabla}\cdot\vec{E},-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{\nabla}\wedge\vec{B})=j^\nu$$

Conservation du courant évidente: $\partial_\nu j^\mu = \partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$

L'autre groupe d'équations s'obtient par: $\vec{B}\rightarrow\vec{E}$, $\vec{E}\rightarrow-\vec{B}$
et en égalant à 0 en l'absence de charge magnétique

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \mathbf{0}$$

où $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur d'ordre 4 totalement antisymétrique

Potentiels

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\boldsymbol{E}}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial\boldsymbol{t}}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\ \exists\ (\Phi\ ,\vec{\boldsymbol{A}})\ ,\ \vec{\boldsymbol{B}}=\vec{\nabla}\wedge\vec{\boldsymbol{A}}\ ,\ \vec{\boldsymbol{E}}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial\boldsymbol{t}}$$

Soit $\boldsymbol{A}^{\mu}=(\Phi,\vec{\boldsymbol{A}})$ $\qquad$ $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}=\partial^{\mu}\boldsymbol{A}^{\nu}-\partial^{\nu}\boldsymbol{A}^{\mu}$

A^{μ} est un 4-vecteur

$$\partial_{\mu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}=\boldsymbol{j}^{\nu}\ \Rightarrow\ \partial_{\mu}\partial^{\mu}\boldsymbol{A}^{\nu}-\partial_{\mu}(\partial^{\nu}\boldsymbol{A}^{\mu})\ \Rightarrow\ \Box\boldsymbol{A}^{\nu}-\partial^{\nu}(\partial_{\mu}\boldsymbol{A}^{\mu})$$

Jauge de Lorentz: $\partial_{\mu}\boldsymbol{A}^{\mu}=0$

Exercice:

Principe cinématique du laser à électrons libres

Soit un champ électrique (ou magnétique) statique parallèle à Oy de distribution sinusoïdale le long de l'axe Oz:

$$\boldsymbol{E}_x = 0, \quad \boldsymbol{E}_y = \boldsymbol{E}_0 \cos \boldsymbol{kz}, \quad \boldsymbol{E}_z = 0$$

Soit un électron d'impulsion $\vec{\boldsymbol{p}}_e$ se déplaçant le long de Oz,

Ecrire le champ électromagnétique vu pas l'électron

A quoi est-il équivalent lorsque l'électron est ultrarelativiste?

Etude de l'interaction de l'électron avec ce champ

on considère que le photon équivalent est strictement rétrodiffusé dans la collision.

Quelle est son impulsion dans le système de l'électron?

Quelle est son impulsion dans le laboratoire?

Mécanisme d'émission?

Structure statique formant un champ électrique périodique:

$$E_x = 0, \quad E_y = E_0 \cos kz, \quad E_z = 0$$

k est la fréquence spatiale,
la longueur d'onde est $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

un électron arrive avec la vitesse $\beta = \frac{p_e}{E_e}$

- Dans le système de l'électron: $B_x' \sim E_y' = \gamma E_0 \cos k(\gamma z' + \beta\gamma t')$

  à haute énergie c'est une onde plane de fréquence $k\gamma$
  ou un ensemble de photons d'énergie $k\gamma$ polarisés linéairement

- Rétrodiffusion

  Si l'énergie des photons est << m_e ,
  les photons rétrodiffusés repartent avec une énergie $hk\gamma$ ou $\gamma\lambda^{-1}$

- Dans le laboratoire,

  les photons prennent un boost γ et leur énergie est $\gamma^2\lambda^{-1}$

Exemple: structure de 1mm, électrons de 511 MeV, $\gamma = 1000$

- 1mm ⇒ 2 10–4 eV donc E_γ = 200 eV, photon X

- Compréhension physique,
- synchrotron, cohérence, émittance, longueur, polarisation

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique

$$P^{\mu} = m\,U^{\mu} = m\gamma(c, \vec{v}) \qquad \frac{dP^{\mu}}{d\tau} = q\,F^{\mu\nu}\,U_{\nu}$$

pour un champ électrique nul la partie spatiale s'écrit

$$m\gamma\frac{d\vec{v}}{d\tau} = m\gamma^2\,\frac{d\vec{v}}{dt} = q\gamma\,(\vec{v}\wedge\vec{B})$$

Décrivons en complexes le mouvement dans le plan orthogonal à B

$$\frac{dv}{dt} = -i\,\frac{qB}{m\gamma}\,v \quad \text{posons } \omega = \frac{qB}{m\gamma}$$

$$\frac{dv}{v} = -i\,\omega\,dt \qquad v = v_0\,e^{-i\omega t} \qquad x = x_0 + i\,\frac{v_0}{\omega}\,e^{-i\omega t}$$

La trajectoire est un cercle de rayon

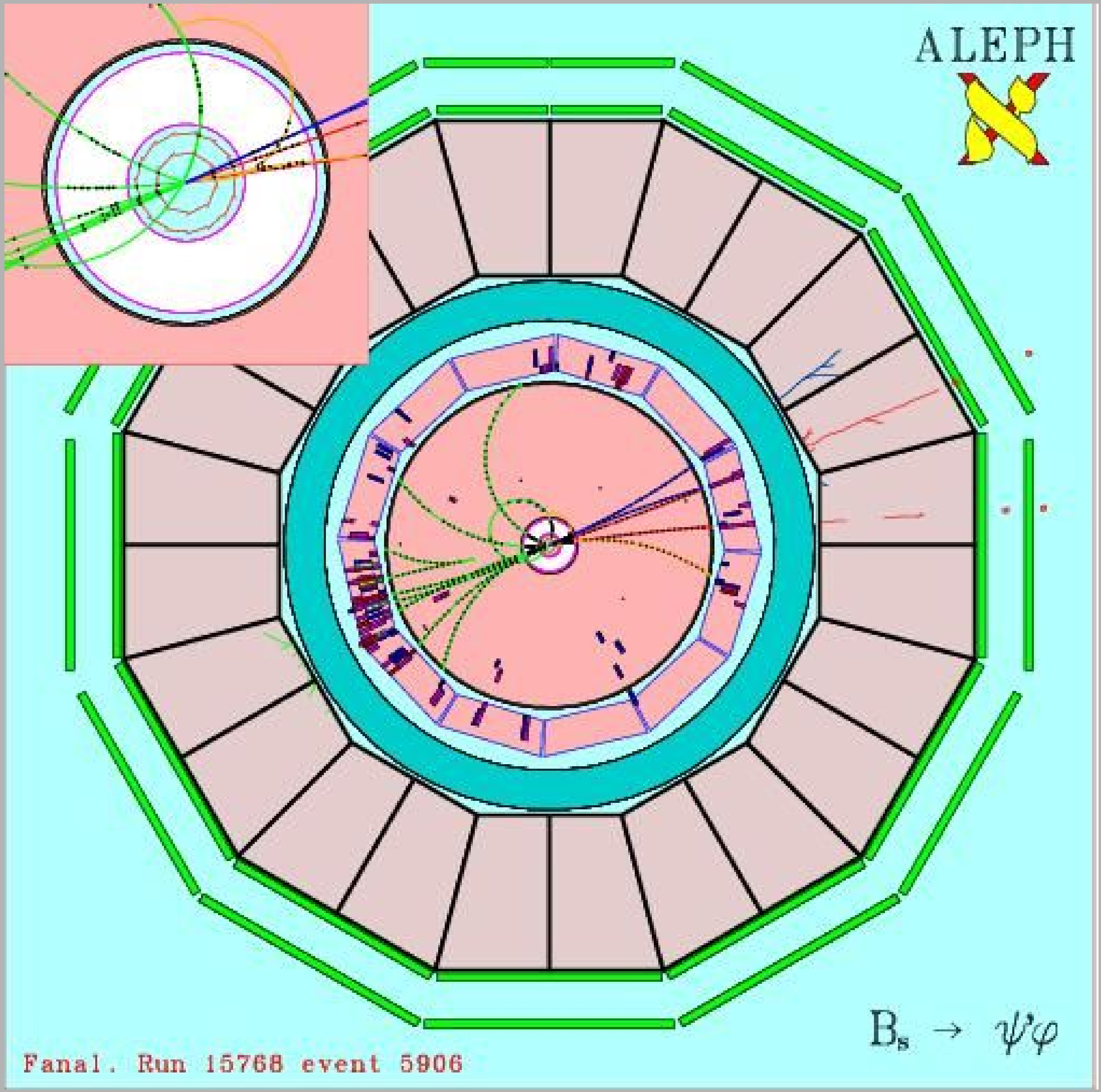
$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{m\gamma\,v}{qB} = \frac{p}{qB}$$

$$\boxed{p = q\,R\,B}$$

en SI, ***p*** est en ***VC/c***, ***qRB*** en ***CmT***
si la charge est en électrons: ***p (eV) = c R(m) B(T)***

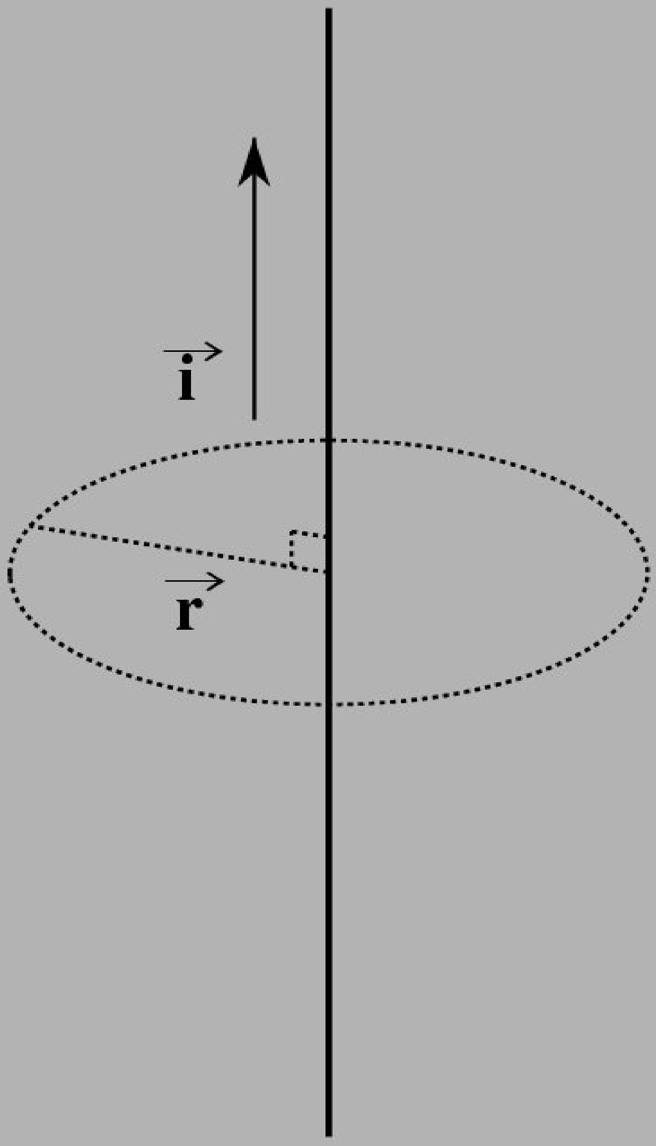
$$\boxed{p(\text{GeV}) = 0{,}3\ B(\text{T})\ R(\text{m})}$$

Un beau plot d'événement d'ALEPH



Champ magnétique créé par un courant rectiligne infini

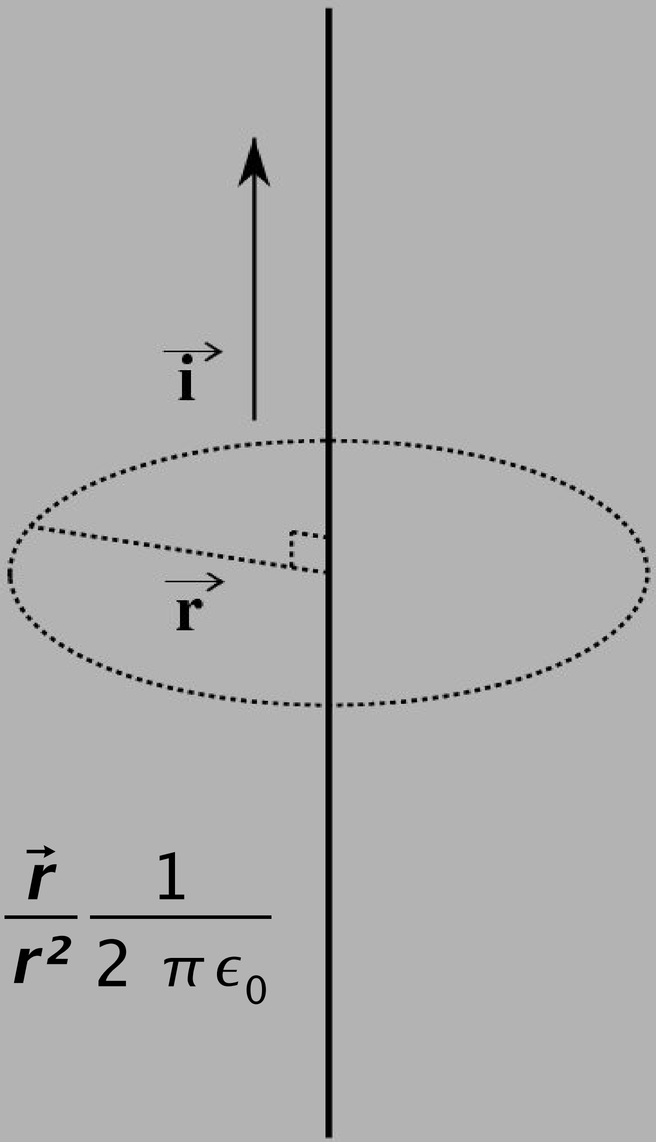
v vitesse (moyenne) des électrons dans le fil
λ densité linéique de charge des électrons
 −λ celle des ions
l'intensité est $\vec{i} = \lambda \vec{v}$
les ions sont au repos dans le laboratoire et créent un champ purement électrique
l'écrire,
champ des électrons dans leur système,
 dans le laboratoire
conclusion,
 champ magnétique dû au courant



Champ magnétique créé par un courant rectiligne infini

v vitesse (moyenne) des électrons dans le fil
λ densité linéique de charge des électrons
–λ celle des ions
l'intensité est $\vec{i} = \lambda \vec{v}$
les ions sont au repos dans le laboratoire et créent un champ purement électrique

$$\vec{E}_i = -\lambda \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{1}{2\pi\epsilon_0}$$



Dans le système des électrons,

leur densité linéique est $\frac{\lambda}{\gamma}$

et leur champ purement électrique $\vec{E}'_e = \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{1}{2\pi\epsilon_0}$

Passons dans le système des ions

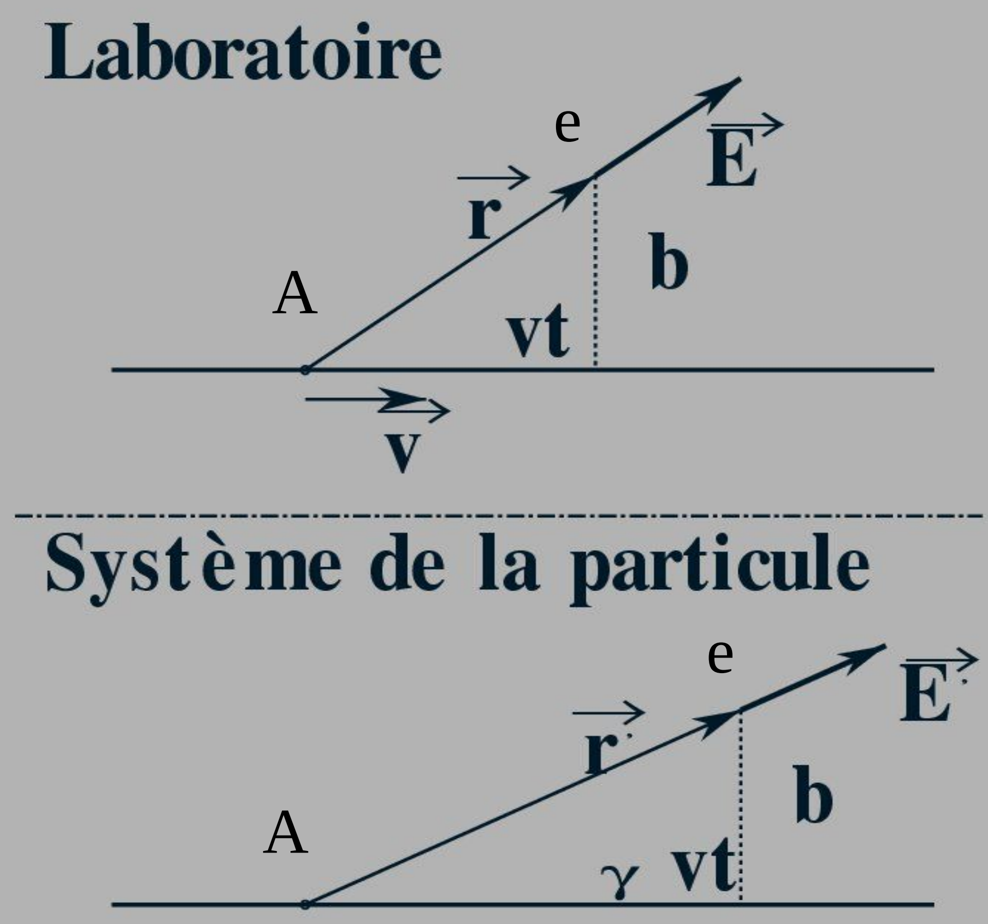
$\vec{E}_e = \gamma \vec{E}'_e$ compense exactement $\vec{E}_i$

$$\vec{B}_e = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 c} \vec{\beta} \wedge \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{i} \wedge \vec{r}}{r^2}$$

Perte d'énergie des particules dans la matière

Considérons une particule chargée A passant à une distance b d'un électron

- Quel est le champ créé par cette particule à la place de l'électron?
- Quelle est l'impulsion transférée à l'électron?
- Quelle est l'énergie perdue par la particule?
- Que se passe-t-il quand une particule traverse un milieu matériel?



Dans le système de A (noté '),
le champ électrique est

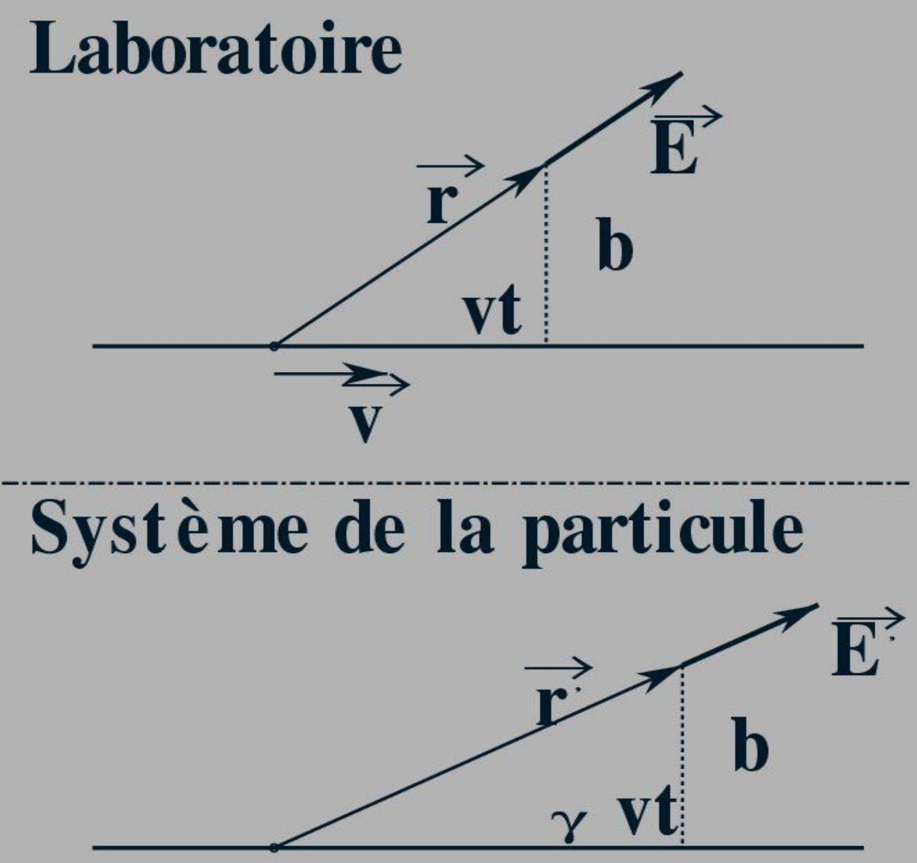
$$\vec{E}\,'=\kappa q\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} \qquad \text{avec}\ \kappa=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E'_y=\kappa q\frac{b}{r'^3}=\kappa q\frac{b}{\sqrt{b^2+(\gamma v t)^2}^{\,3}}$$

Dans le laboratoire:

$$E_y=\gamma E'_y$$

$$E'_y=\frac{\kappa\gamma q b}{\sqrt{b^2+(\gamma v t)^2}^{\,3}}$$



$$\vec{F}=e\vec{E}=\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{p}=\int e\vec{E}\,dt$$

Posons $x=\frac{\gamma v t}{b}$

L'impulsion transférée le long de Oy est:

$$p_y=e\int E_y\,dt=\kappa e q\frac{1}{bv}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^{\,3}}$$

L'intégrale est calculée en posant $x=\mathrm{sh}\,\xi$

L'intégrant s'écrit alors $\frac{d\xi}{\mathrm{ch}^2\xi}=d\,\mathrm{th}\,\xi$ L'intégrale vaut 2

$$p=2\kappa e q\frac{1}{vb} \qquad E\sim\frac{p^2}{2m}\sim\frac{1}{v^2b^2}$$

Pour avoir la perte d'énergie, intégrons en φ et b:

contribution en $x=\int\frac{db}{b}=\ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right)$

b_{min} est lié au transfert maximum

b_{max} est lié au transfert minimum

$$E_{max}=2m\gamma^2v^2\,,\ b_{min}\sim\frac{1}{\gamma m v^2}\,,\ b_{max}=\frac{\gamma v}{\omega}$$

où w est un transfert d'énergie minimal,
énergie de liaison
(temps de collision comparé à une période)
énergie plasma,
Effet d'écran, plateau de Fermi

Fluctuation de la perte d'énergie
courbe de Landau
queue en E^{-2} ; rayons δ

$\beta = 0.0$

$\beta = 0.4$

$\beta = 0.6$

$\beta = 0.8$

$\beta = 0.9$

$\beta = 095$